

Détermination du comportement viscoélastique des matériaux par une méthode de réflexion d'ondes

Gaëlle Fedoce ^a, Robert H. Blanc ^{a,b}

^aPrécédemment : Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du CNRS, Marseille

^bTrans.Waves - Société d'Etude et de Métrologie en Dynamique des Matériaux
150, cité Le Corbusier 13008 Marseille
Email : rh.blanc@wanadoo.fr

Résumé :

Nous établissons une méthode de caractérisation des matériaux viscoélastiques dans le domaine linéaire, par réflexion d'ondes, dans la gamme 20 - 20 000 Hz. L'étude théorique prend en compte la réflexion d'une onde longitudinale à une dimension à l'interface entre deux barres viscoélastiques en contact sur leur extrémité. La première barre, l'enclume, étant connue, le module complexe E de la seconde est obtenu en fonction de la fonction de transfert des ondes incidente et réfléchie par l'interface, mesurée en un point de l'enclume. L'impulsion initiale est engendrée par un léger choc. Une méthode basée sur la synthèse de deux mesures est proposée afin d'améliorer la précision des résultats. Cette méthode de caractérisation permet alors des mesures performantes et présente un intérêt pratique certain.

Abstract :

A wave reflection method is described for characterizing viscoelastic media in the linear domain in the 20 - 20 000 Hz frequency range. In the theoretical part of this study, we deal with the reflection of a one-dimensional longitudinal wave at the interface between two viscoelastic bars contacting each other at one of their ends. The first bar (the anvil) is known, and the complex modulus E of the second bar is therefore obtained from the transfer function of the incident wave and the wave reflected by the interface, which is measured at a point on the anvil. The initial pulse is generated by applying a slight shock. A method based on two measurements combined is proposed for improving the accuracy of the results. The present study shows that this is an efficient and useful method of characterization.

Mots-clés :

Réflexion d'onde ; module complexe ; amortissement.

1 Introduction

Les matériaux doués d'amortissement se caractérisent par des modules complexes, fonctions de la fréquence. Si l'on range par fréquences croissantes leurs méthodes de mesure, on observe une lacune entre les méthodes vibratoires et les méthodes ultrasonores. Pour combler cette lacune, Blanc a établi dès 1971 des méthodes où les caractéristiques d'un échantillon sont déduites de l'évolution de la forme d'une onde qui le parcourt, Blanc (1993). Ce sont des méthodes par transmission. Nous proposons ici une méthode par réflexion où ces mêmes caractéristiques sont obtenues par comparaison d'une impulsion incidente et de l'impulsion réfléchie par le milieu étudié. Il est possible aussi d'accéder à ces mesures par un prolongement des méthodes d'impédance développées par Lundberg *et al.* Récemment, Lemerle (2002) a proposé une méthode basée sur une modélisation particulière, qui a l'avantage d'opérer sur des échantillons courts. C'est l'objet d'une partie de la thèse de Fedoce (1996) d'avoir repris le problème à la base et de l'avoir résolu complètement dans sa généralité.

2 Position du problème

On considère le système représenté sur la figure 1, composé de deux barreaux constitués de matériaux viscoélastiques, l'un connu, l'autre de module complexe inconnu, en contact sur une de leurs sections droites. Une onde incidente se propageant dans la première barre que nous appellerons enclume, est en partie réfléchie au niveau de l'interface et en partie transmise dans le second barreau.

L'équation du mouvement dans un barreau mince est :

$$(1) \quad \mathbf{r} \frac{\mathcal{I}^2 u(x,t)}{\mathcal{I} t^2} = \frac{\mathcal{I} \mathbf{s}(x,t)}{\mathcal{I} x}.$$

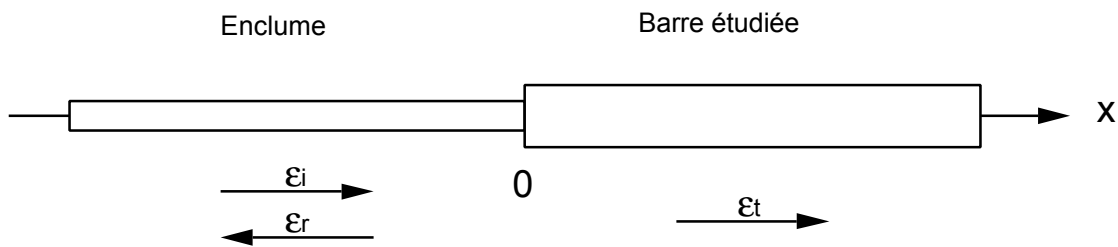


FIG. 1 - Système étudié.

Soit, en prenant la transformée de Fourier [$\bar{f}(x, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-i\mathbf{w}t} dt$] :

$$(2) \quad \frac{\mathcal{I} \bar{\mathbf{s}}(x, \mathbf{w})}{\mathcal{I} x} = - \mathbf{w}^2 \mathbf{r} u(x, \mathbf{w}).$$

La déformation est, par définition : $\mathbf{e}(x,t) = \mathcal{I} u(x,t) / \mathcal{I} x$. Dont la transformée de Fourier est :

$$(3) \quad \bar{\mathbf{e}}(x, \mathbf{w}) = \frac{\mathcal{I} \bar{u}(x, \mathbf{w})}{\mathcal{I} x}.$$

Dans le cas d'un milieu viscoélastique à une dimension, la loi contrainte-déformation est :

$$(4) \quad \bar{\mathbf{s}}(x, \mathbf{w}) = E(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{e}}(x, \mathbf{w}).$$

On a alors le système d'équations (2), (3) et (4). On en tire, par élimination de \bar{u} et de $\bar{\mathbf{e}}$:

$$\frac{\mathcal{I}^2 \bar{\mathbf{s}}(x, \mathbf{w})}{\mathcal{I} x^2} = - \mathbf{w}^2 \frac{\mathbf{r}}{E(\mathbf{w})} \bar{\mathbf{s}}(x, \mathbf{w}),$$

équation qui a pour solution générale :

$$(5) \quad \bar{\mathbf{s}}(x, \mathbf{w}) = \mathbf{b}_1 e^{-i \mathbf{w} x \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{E(\mathbf{w})}}} + \mathbf{b}_2 e^{i \mathbf{w} x \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{E(\mathbf{w})}}}$$

où \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont des constantes définies par les conditions aux limites.

3 Théorie de la méthode

3.1 Equations de propagation

Dans ce qui suit, l'indice e indique une grandeur relative à l'enclume et l'indice v, une grandeur relative à la barre inconnue.

Dans la barre étudiée, l'équation (5) s'applique à $\bar{\mathbf{S}}_t$ qui se propage dans le sens des x positifs. On suppose le barreau suffisamment long et l'impulsion suffisamment courte pour qu'aucun écho de la réflexion à son extrémité ne se présente à l'abscisse du point de mesure. On peut alors considérer le barreau comme semi-infini. La condition aux limites est donc :

$$(6) \quad \begin{aligned} |\bar{\mathbf{S}}_t(+\infty, \mathbf{w})| < +\infty & \quad \text{d'où} \quad \mathbf{b}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{S}}_t(0, \mathbf{w}). \text{ Soit :} \\ \bar{\mathbf{S}}_t(x, \mathbf{w}) &= \bar{\mathbf{S}}_t(0, \mathbf{w}) e^{-i \mathbf{w} x \sqrt{\frac{\mathbf{r}_v}{E_v(\mathbf{w})}}} \end{aligned}$$

Dans l'enclume, cette équation (5) s'applique indépendamment à $\bar{\mathbf{S}}_i$ et $\bar{\mathbf{S}}_r$ qui se propagent respectivement vers les x positifs et négatifs. On suppose encore l'enclume suffisamment longue et l'impulsion suffisamment courte pour éviter la superposition lors des passages successifs de l'impulsion au niveau du point de mesure. On considère donc encore le barreau comme semi-infini. Les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{aligned} \text{pour } \bar{\mathbf{S}}_i : \quad |\bar{\mathbf{S}}_i(+\infty, \mathbf{w})| < +\infty & \quad \text{d'où} \quad \mathbf{b}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{S}}_i(0, \mathbf{w}), \\ \text{pour } \bar{\mathbf{S}}_r : \quad |\bar{\mathbf{S}}_r(-\infty, \mathbf{w})| < +\infty & \quad \text{d'où} \quad \mathbf{b}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2 = \bar{\mathbf{S}}_r(0, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Soit :

$$(7) \quad \bar{\mathbf{S}}_i(x, \mathbf{w}) = \bar{\mathbf{S}}_i(0, \mathbf{w}) e^{-i \mathbf{w} x \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}}$$

$$(8) \quad \bar{\mathbf{S}}_r(x, \mathbf{w}) = \bar{\mathbf{S}}_r(0, \mathbf{w}) e^{i \mathbf{w} x \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}}$$

3.2 Coefficient de réflexion

On a l'équation (issue de l'équation du mouvement) :

$$\frac{\mathcal{F} \mathbf{S}(x, t)}{\mathcal{F} x} = \mathbf{r} \frac{\mathcal{F} v(x, t)}{\mathcal{F} t},$$

soit, par transformée de Fourier :

$$\frac{\mathcal{F} \bar{\mathbf{S}}(x, t)}{\mathcal{F} x} = i \mathbf{w} \mathbf{r} \bar{v}(x, \mathbf{w}).$$

En l'appliquant à $\bar{\mathbf{S}}_t$, d'après (6), on obtient pour $x = 0$:

$$(9) \quad \sqrt{\frac{\mathbf{r}_v}{E_v(\mathbf{w})}} \bar{\mathbf{S}}_t(0, \mathbf{w}) = -\mathbf{r}_v \bar{v}_t(0, \mathbf{w}).$$

Ou, toujours pour $x = 0$, en l'appliquant à $\bar{\mathbf{S}}_i$ et à $\bar{\mathbf{S}}_r$, d'après (7) et (8) :

$$(10) \quad \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}} \bar{\mathbf{s}}_i(0, \mathbf{w}) = -\mathbf{r}_e \bar{v}_i(0, \mathbf{w})$$

$$(11) \quad \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}} \bar{\mathbf{s}}_r(0, \mathbf{w}) = \mathbf{r}_e \bar{v}_r(0, \mathbf{w}).$$

Si l'on suppose que le contact est maintenu, les conditions aux limites à l'interface entre les deux barres, c'est à dire en $x = 0$, sont, respectivement pour les forces et les vitesses matérielles :

$$(12) \quad \begin{aligned} A_v \mathbf{s}_i(0, t) &= A_e [\mathbf{s}_i(0, t) + \mathbf{s}_r(0, t)] \quad \forall t \\ v_i(0, t) &= v_i(0, t) + v_r(0, t) \quad \forall t. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant (9), (10) et (11) après avoir pris la transformée de Fourier de (12), l'on obtient le coefficient de réflexion :

$$(13) \quad R(0, \mathbf{w}) = \frac{\bar{\mathbf{s}}_r(0, \mathbf{w})}{\bar{\mathbf{s}}_i(0, \mathbf{w})} = \frac{\frac{A_v}{A_e} - \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e E_e(\mathbf{w})}{\mathbf{r}_v E_v(\mathbf{w})}}}{\frac{A_v}{A_e} + \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e E_e(\mathbf{w})}{\mathbf{r}_v E_v(\mathbf{w})}}}.$$

3.3 Caractéristiques dynamiques

On se propose de déterminer le module complexe inconnu $E_v(\mathbf{w})$ à partir de l'observation des ondes de déformation, incidente \mathbf{e}_i et réfléchie \mathbf{e}_r , dans l'enclume.

Compte tenu de (4), l'équation précédente (13) est équivalente à :

$$(14) \quad E_v(\mathbf{w}) = \left(\frac{A_e}{A_v} \right)^2 \frac{\mathbf{r}_e}{\mathbf{r}_v} E_e(\mathbf{w}) \left(\frac{\bar{\mathbf{e}}_i(0, \mathbf{w}) + \bar{\mathbf{e}}_r(0, \mathbf{w})}{\bar{\mathbf{e}}_i(0, \mathbf{w}) - \bar{\mathbf{e}}_r(0, \mathbf{w})} \right)^2.$$

Par les formules (4), (7) et (8), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i(-x_m, \mathbf{w}) &= \bar{\mathbf{e}}_i(0, \mathbf{w}) e^{i \mathbf{w} x_m \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}} \\ \bar{\mathbf{e}}_r(-x_m, \mathbf{w}) &= \bar{\mathbf{e}}_r(0, \mathbf{w}) e^{-i \mathbf{w} x_m \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}} \end{aligned}$$

où $-x_m$ est l'abscisse d'un point quelconque de l'enclume, en lequel se fera la mesure. La relation (14) peut donc se réécrire finalement :

$$(15) \quad E_v(\mathbf{w}) = \left(\frac{A_e}{A_v} \right)^2 \frac{\mathbf{r}_e}{\mathbf{r}_v} E_e(\mathbf{w}) \left(\frac{F(\mathbf{w}) e^{2i \mathbf{w} x_m \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}} + 1}{F(\mathbf{w}) e^{2i \mathbf{w} x_m \sqrt{\frac{\mathbf{r}_e}{E_e(\mathbf{w})}}} - 1} \right)^2$$

$$\text{où} \quad F(\mathbf{w}) = \frac{\bar{\mathbf{e}}_r(-x_m, \mathbf{w})}{\bar{\mathbf{e}}_i(-x_m, \mathbf{w})}$$

n'est autre que la fonction de transfert des deux relevés de l'impulsion, incident et réfléchi, au point de mesure.

4. Etude expérimentale

4.1 Le montage

Il est semblable dans son principe à celui décrit par Blanc (1993). La figure 2 schématise le montage que nous avons utilisé. L'impulsion incidente est provoquée par un léger choc en bout d'enclume. C'est également ce contact qui, fermant un circuit électrique, déclenche un balayage isolé des appareils d'enregistrement et de mesure. Le signal délivré par les jauges est amplifié, puis un séparateur constitué de portes permet d'obtenir le signal correspondant à l'onde incidente sur une voie et celui correspondant à l'onde réfléchie sur l'autre. Ces signaux sont alors traités par un analyseur de spectre qui permet de réaliser des moyennes et fournit directement la fonction de transfert $F(\omega)$.

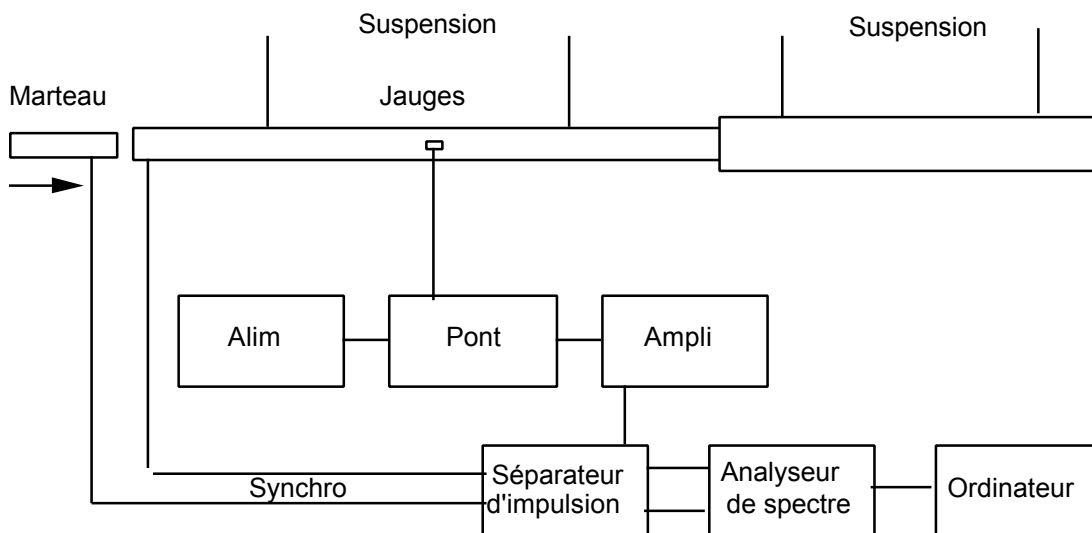


FIG. 2 - Le banc de mesure.

4.2 Résultats

On a validé la méthode par des tests sur différents matériaux en comparant ces résultats à ceux obtenus par la méthode de référence, Blanc (1993). Le cas d'un Nylon reporté ici en est un exemple. Des mesures réalisées avec une enclume en duralumin, on a conservé le module du module complexe et de celles réalisées avec une enclume de chlorure de polyvinyle, on a conservé l'angle de perte. En fonction de ces grandeurs, des relations connues expriment la vitesse de phase et le coefficient d'amortissement des ondes longitudinales à une dimension, autre écriture possible des caractéristiques de la barre étudiée. C'est la présentation retenue à la figure 3 (résultats valables au-dessus de 230 Hz).

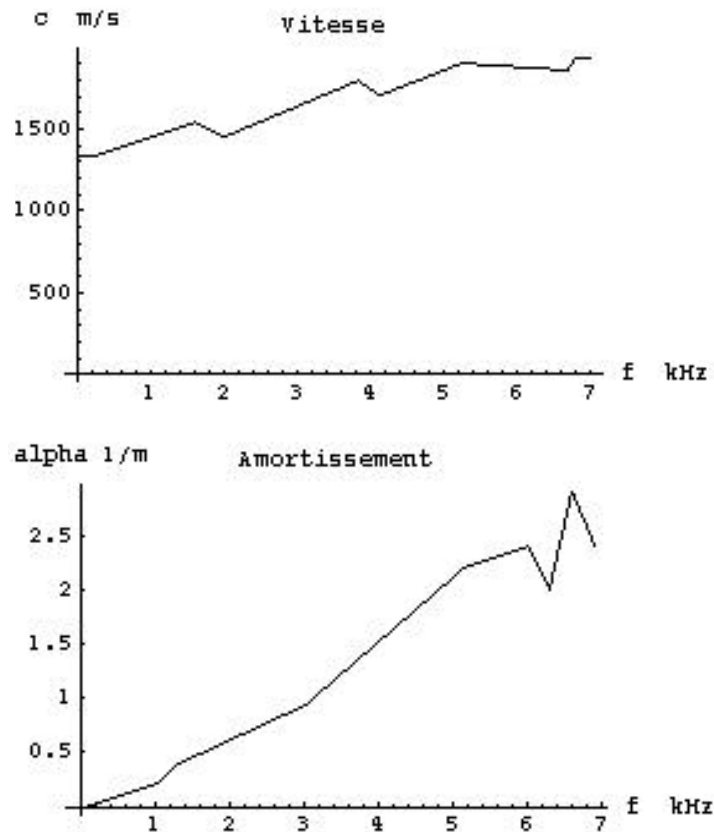


FIG. 3 - Célérité et amortissement dans le Nylon, synthèse.

5 Conclusion

Nous avons établi une méthode de caractérisation des matériaux viscoélastiques par réflexion d'ondes transitoires dans la gamme 20 Hz - 20 kHz. La méthode est opérationnelle. Elle offre de nombreux avantages, notamment de n'exiger qu'une faible longueur de barre et de n'avoir pas à instrumenter l'échantillon.

Remerciements

La présente recherche est une partie d'une étude soutenue par la Délégation Générale à l'Armement, Direction des Constructions Navales, que les auteurs tiennent à remercier ici.

Références

- Blanc, R.H. 1993 Transient Wave Propagation Methods for Determining the Viscoelastic Properties of Solids. *J. Appl. Mech.*, **60**(3), 763-768.
- Fedoce, G. 1996 Réflexion d'ondes viscoélastiques. Détermination du comportement dynamique de matériaux sous charges. *Thèse Doct. Méca.*, sous la Direction de R.H. Blanc, Univ. Aix-Marseille II.
- Lemerle, P. 2002 Measurement of the viscoelastic properties of damping materials: adaptation of the wave propagation method to test samples of short length. *J. Sound Vibr.*, **250**(2), 181-196.
- Lundberg, B. 1985 *Communication personnelle*.